UNIVERSIDAD POLITECNICA DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA



ING MECATRONICA

Enciso Guerrero Benjamin Salvador

Dinámica y control de robots

Carlos Enrique Moran Garabito.

Modelo dinámico del comportamiento del manipulador mediante a formulación Euler-Lagrange

8-B.

Modelo dinámico del comportamiento del manipulador mediante a formulación Euler-Lagrange

En la formulación de Newton-Euler, las ecuaciones de movimiento fueron derivadas a partir de la Segunda Ley de Newton, la cual relaciona fuerza y momento, así como torque y momento angular. Las ecuaciones resultantes incluyen fuerzas de restricción, las cuales deben ser eliminadas para poder obtener ecuaciones dinámicas de forma cerrada. En la formulación de Newton-Euler, las ecuaciones no son expresadas en términos de variables independientes, y no incluyen explícitamente torques de junta de entrada, pues se necesitan operaciones aritméticas para derivar las ecuaciones dinámicas de forma cerrada. Esto representa un complejo procedimiento que requiere cierta intuición física.

Una alternativa al método de Newton-Euler, para dinámica de manipuladores, es la formulación de Lagrange-Euler, la cual describe el comportamiento de un sistema dinámico en términos del trabajo y la energía almacenados en el sistema, en vez de las fuerzas y momentos de los miembros individuales involucrados. Las fuerzas de restricción comprometidas en el sistema quedan automáticamente eliminadas en las ecuaciones dinámicas obtenidas por este método. Las ecuaciones dinámicas de forma cerrada pueden ser derivadas sistemáticamente en cualquier sistema de coordenadas.

Sean $\rm q\_1,\dots, q\_n$ coordenadas generalizadas que localizan completamente un sistema dinámico. Sean $\rm T$ y $\rm U$ la energía cinética total, y la energía potencial almacenadas en el sistema dinámico, respectivamente. Luego, el Lagrangiano $\textit{L}$ puede definirse como:

\begin{equation} \rm \textit{L}{(q\_i,\dot{q}\_i)} = T - U. \end{equation}

Ya que las energías cinética y potencial son funciones de $\rm q\_i$ y de $\rm \dot{q}\_1$, $\rm i = 1,\dots, n)$, también lo es el *Lagrangiano* $\textit{L}$. Usando el *Lagrangiano*, las ecuaciones de movimiento del sistema dinámico están dadas por:

\begin{equation} \rm \frac{d}{dt}\frac{\partial \textit{L}}{\partial \dot{q}\_i} - \frac{\partial \textit{L}}{\partial q\_i} = Q\_i, \end{equation}

con $i = 1, \dots, n$, donde $\rm Q\_i$ es la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada generalizada $\rm q\_i$. La fuerza generalizada puede ser identificada considerando el trabajo virtual realizado por las fuerzas no conservativas que actúan en el sistema.

**El tensor de inercia del manipulador**

Si se quiere obtener las ecuaciones de movimiento de un brazo manipulador usando el Lagrangiano, se debe comenzar derivando la energía cinética almacenada en un sólo eslabón del brazo. Como se ve en la figura 1, $\mathbf{v\_{ci}}$ y $\boldsymbol{\omega\_i}$ corresponden al vector de velocidad, de dimensión 3x1, del centroide y al vector de velocidad angular de dimensión 3x1 respectivamente, con referencia al sistema de coordenadas de base, el cual es un sistema de referencia inercial. La energía cinética del eslabón i está dada por:

\begin{equation} \rm T\_i = \frac{1}{2} \cdot m\_i \cdot \mathbf{v\_{ci}^T} \cdot \mathbf{v\_{ci}} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\omega\_i^T} \cdot I\_i \cdot \boldsymbol{\omega\_i}, \end{equation}

dónde: $\rm m\_i$ es la masa del eslabón $\rm i$, e $\rm I\_i$ es su tensor de inercia de dimensión 3x3 en el centroide, expresado en coordenadas de base. El primer término en la ecuación representa la energía cinética resultante del movimiento translacional de la masa $\rm m\_i$, mientras que el segundo término representa la energía cinética resultante de la rotación alrededor del centroide. Entonces, la energía cinética total almacenada en el brazo completo está dada entonces por la ecuación, ya que la energía es aditiva.

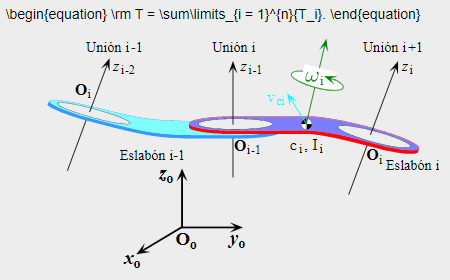


Figura 1. Velocidades centroidal y angular de eslabón $\rm i$.

La expresión correspondiente a la energía cinética está descrita en términos de la velocidad lineal y de la velocidad angular de cada eslabón, las cuales no son variables independientes.

Universidad de Santiago de Chile. (2009). Formulación de Lagrange-Euler para las Ecuaciones de Movimiento. 13-03-20, de Moodle Sitio web: http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/mod/book/view.php?id=24924&chapterid=323